

CURRENT DISTRIBUTION IN PERMEABLE ELECTRODES
INFLUENCED BY THE HALL EFFECT IN THE FLOW OF
AN ELECTRICALLY CONDUCTING MEDIUM

Yu. P. Yemets

GPO PRICE \$ _____

CFSTI PRICE(S) \$ _____

Hard copy (HC) 3.00

Microfiche (MF) .65

853 July 85

Translation of "O raspredelenii toka na pronitsayemykh elektrodakh
pri nalichii effekta Kholla v potoke elektroprovodnoy sredy"
Zhurnal Prikladnoy Mekhaniki i Tekhnicheskoy
Fiziki, No. 3, pp. 35-41, 1966

N67-15696

FACILITY FORM 602

(ACCESSION NUMBER)	(THRU)
<u>13</u>	<u>1</u>
(PAGES)	(CODE)
(NASA CR OR TMX OR AD NUMBER)	(CATEGORY)
	<u>25</u>

NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION
WASHINGTON
DECEMBER 1966

CURRENT DISTRIBUTION IN PERMEABLE ELECTRODES
INFLUENCED BY THE HALL EFFECT IN THE FLOW OF
AN ELECTRICALLY CONDUCTING MEDIUM

Yu. P. Yemets

ABSTRACT

The author considers the two-dimensional problem of the current distribution on the surfaces of permeable electrodes adjacent to a flow of an incompressible medium in which the Hall effect is taking place. Through the electrodes pass puffs of an electrically conducting medium with the same physical properties as the basic flow. It is shown that these puffs may be used to regulate distribution of current on the electrodes and to help stabilize it.

1. Let us have an infinite plane magnetohydrodynamic channel with /35* subdivided electrodes having dimensions which are small in comparison with the width of the channel. Then, since current distribution is sought in this problem only on the electrodes, it is completely sufficient to study the behavior of the current on the electrodes at one wall and to disregard the effect of the remaining electrodes. This assumption does not introduce any noticeable error into the results although it simplifies the solution to the problem considerably.

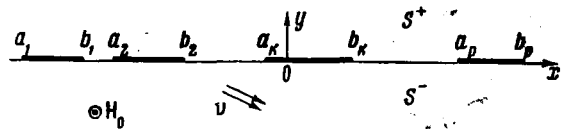


Figure 1

In conformity with this simplification, we shall assume that a stream of an electrically conductive medium $v(u(x, y), v(x, y), 0)$ having anisotropic conductivity fills the lower half-plane and that the real axis coincides with the direction of the wall (fig. 1). Segments $a_k b_k$ ($k = 1, 2, \dots, p$) in figure

—

*

Numbers given in margin indicate pagination in original foreign text.

l indicate sections of contact between the electrodes and the flow of the medium, while the remaining part of the real axis Ox is the boundary of the insulating walls. It is assumed that the external magnetic field $H(0, 0, H_z)$ is homogeneous in the lower half-plane and that the proper magnetic field of the currents in the medium is small and may be disregarded.

The electrodes of the second wall of the channel are directed to an infinitely remote point.

For finding the currents in the lower half-plane, we have the system of equations

$$\left. \begin{aligned} j_x &= \sigma \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{c} v H_0 \right) - \omega \tau j_y, & j_y &= \sigma \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{c} u H_0 \right) + \omega \tau j_x \\ \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, & H_0 &\equiv H_z \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Here $j_x(x, y)$ and $j_y(x, y)$ are components of the current vector, $\varphi(x, y)$ is the potential of the electrostatic field, σ is electrical conductivity and $\omega \tau$ is the Hall parameter (σ and $\omega \tau$ are constants).

Assuming that the materials for the electrodes and insulating walls have ideal properties, we obtain the boundary conditions under which system (1.1) must be solved

$$\left. \begin{aligned} j_x + \omega \tau j_y &= \frac{1}{c} \sigma H_0 v(x), & a_k < x < b_k & \text{ for } y=0 \\ j_y &= 0, & b_k < x < a_{k+1} & \text{ for } y=0 \end{aligned} \right\} \quad \left(\begin{array}{l} k=1, 2, \dots, p \\ a_{p+1} = a_1 \end{array} \right) \quad (1.2)$$

We have current sinks or sources at infinity.

Under the given hypotheses, it follows from system (1.1) that the electrical current field will be solenoidal and eddy-free, and consequently we may introduce the complex potential of electric current $F(z)$ according to the formulas

$$\begin{aligned} j_x(x, y) &= \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, & j_y(x, y) &= \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \\ F(z) &= P(x, y) + iQ(x, y) & (z = x + iy) \\ \frac{dF(z)}{dz} &= \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = j_x(x, y) - ij_y(x, y), & \frac{dF(z)}{dz} &= j(z) \end{aligned} \quad (1.3)$$

In (1.3) $P(x, y)$ is the potential function of the electric current; $Q(x, y)$ is the force function of electric current; $j(z)$ is the complex electrical current.

Determination of the currents in the half-plane $\text{Im } z < 0$ now reduces to the following boundary problem for the complex current:

$$\text{Re} \{ j(z) \} = \frac{\sigma H_0}{c} v(x) \text{ for } y=0, \quad \text{Im } j(z) = 0 \text{ for } y=0 \quad (1.4)$$

Here L' designates the set of segments $a_k b_k$ ($k = 1, \dots, p$) and L'' designates the remaining part of the real axis.

In virtue of the initial assumptions, $j(z)$ is characterized at infinity by the expansion

$$j(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots, \quad |z| \rightarrow \infty$$

Boundary problem (1.4) may be readily solved by reducing it to a generalized problem of linear conjugation (refs. 2 and 3). For this purpose we use analytic continuation of the function $j(z)$ in the upper half-plane, stipulating that $v(x)$ satisfies a Hölder boundary condition on L' . Let us use the notation S^+ and S^- to designate the upper and lower half-planes respectively, taking rotation which leaves the region S^+ on the left as positive with respect to the real axis. We then get the following generalized problem of linear conjugation (Riemann's problem) from (1.4):

$$\begin{aligned} \Psi^+(x) &= -\frac{1+i\omega\tau}{1-i\omega\tau} \Psi^-(x) + \frac{2\omega H_0 v(x)}{c(1-i\omega\tau)}, \quad \text{for } L' \\ \Psi^+(x) &= \Psi^-(x) \quad \text{for } L'' \\ \Psi(z) &= \begin{cases} \Psi^+(z) & \text{for } z \in S^+, \quad \Psi^+(z) = j(z) \\ \Psi^-(z) & \text{for } z \in S^-, \quad \Psi^-(z) = \overline{j(z)} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5)$$

The solution of boundary problem (1.5) in the class of unbounded (but integrable) functions at the ends of the electrodes has the form

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \prod_{k=1}^p (z-a_k)^{-1/\varepsilon} (z-b_k)^{-1/\varepsilon} \left\{ \frac{1}{\pi c \sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \right. \\ &\times \int_{L'} \prod_{k=1}^p (x-a_k)^{1/\varepsilon} (x-b_k)^{1/\varepsilon} \left| \frac{v(x) dx}{x-z} + C_1 z^{p-1} + C_2 z^{p-2} + \dots + C_p \right\} \\ &(\varepsilon = \pi^{-1} \arctg \omega\tau, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1/2) \end{aligned} \quad (1.6)$$

which vanishes at infinity.

For the function under the product sign in (1.6) we take the branch which is characterized at large absolute values of z by the expansion

$$\prod_{k=1}^p (z-a_k)^{-1/\varepsilon} (z-b_k)^{-1/\varepsilon} = \frac{1}{z^p} + \frac{d_{p+1}}{z^{p+1}} + \dots, \quad |z| \rightarrow \infty \quad (1.7)$$

The components of electric current j_x, j_y on the electrodes are found from the Sokhotskiy-Plemel' formulas

$$j_x(x) = \frac{\Psi^+(x) + \Psi^-(x)}{2} = \frac{\sigma H_0 v(x)}{c(1 + \omega^2 \tau^2)} + \left| \prod_{k=1}^p (x - a_k)^{-1/2} (x - b_k)^{-1/2} \right| \times$$

$$\times \left\{ \frac{\omega \tau \sigma H_0}{nc(1 + \omega^2 \tau^2)} \int_L^x \prod_{k=1}^p (t - a_k)^{1/2} (t - b_k)^{1/2} \frac{d(t)}{t - x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega \tau (C_1 x^{p-1} + C_2 x^{p-2} + \dots + C_p)}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \right\} \quad (1.8)$$

$$j_y(x) = \frac{\Psi^+(x) - \Psi^-(x)}{2} = \frac{\omega \tau \sigma H_0 v(x)}{c(1 + \omega^2 \tau^2)} - \left| \prod_{k=1}^p (x - a_k)^{-1/2} (x - b_k)^{-1/2} \right| \times$$

$$\times \left\{ \frac{\sigma H_0}{nc(1 + \omega^2 \tau^2)} \int_L^x \prod_{k=1}^p (t - a_k)^{1/2} (t - b_k)^{1/2} \frac{d(t)}{t - x} + \right.$$

$$\left. + \frac{C_1 x^{p-1} + C_2 x^{p-2} + \dots + C_p}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \right\} \quad (1.9)$$

Constants C_k ($k = 1, 2, \dots, p$) are uniquely determined from a linear system of p equations

$$\int_L^x j_y(x) dx = I_k, \quad (k = 1, 2, \dots, p) \quad (1.10)$$

where I_k is the total current flowing through the k -th electrode.

In the resultant solution j_x and j_y become infinite at the points a_k and b_k with an order of less than unity. In the physical sense, these singularities characterize concentration of currents at the ends of the electrodes and in their neighborhood. Other solutions may also be constructed which remain close to any predetermined ends of the electrodes (and necessarily vanish on them). The problem of selecting the required solution is determined in specific cases on the basis of additional physical conditions and assumptions. It is necessary in particular to consider the electric circuit of electrode connection, the relative positions and dimensions of the electrodes, the law for distribution of normal velocity on the electrodes and other conditions. The total number of all possible solutions is 2^{2p} (refs. 2 and 3).

2. Let us study in detail the special case where a single electrode [38] with the following finite dimensions is located on the wall

$$\phi = 2L, \quad -L \leq x \leq L \quad \text{for } y = 0$$

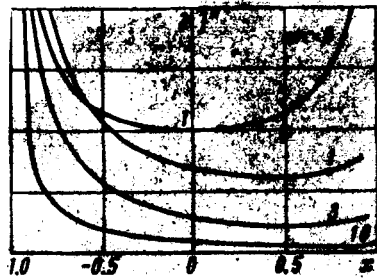


Figure 2

All solutions, numbering 2^2 , are now determined only by the conditions under which the electrically conductive medium is forced through the electrode.

Let us consider these solutions and derive conditions which must be satisfied by the injection velocity at the electrode.

(a) Solution which is unbounded at both ends of the electrode. When there is no injection ($v(x) = 0$ on ab), spread of the current passing through the electrode will be accompanied in the region S^- by concentration at the ends of the electrodes a and b . We find the current distribution on the electrode on the basis of the solution of (1.8) and (1.9).

$$j_x(x) = \frac{\omega\tau C}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} (l+x)^{-1/2-\epsilon} (l-x)^{-1/2+\epsilon} \quad (2.1)$$

$$j_y(x) = \frac{-C}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} (l+x)^{-1/2-\epsilon} (l-x)^{-1/2+\epsilon} \quad (-l \leq x \leq l) \quad (2.2)$$

The constant C is determined from condition (1.10)

$$\begin{aligned} I &= \frac{-C}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \int_{-l}^l (l+x)^{-1/2-\epsilon} (l-x)^{-1/2+\epsilon} dx = \frac{-C\Gamma(1/2-\epsilon)\Gamma(1/2+\epsilon)}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} = \\ &= \frac{-\pi C}{\cos \pi\epsilon \sqrt{1+\omega^2\tau^2}}, \quad C = -\frac{I}{\pi} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Formulas (2.1) - (2.3) show the effect which anisotropy in the conductivity of the medium has on the distribution of current on the electrode. When parameter $\omega\tau$ is increased, the current density increases at the edge of the electrode near end a with a corresponding reduction at end b . This effect is illustrated in figure 2 where curves $j^* = \pi j_y(x) / I$ are plotted for four values of the

parameter $\omega\tau = 0, 1, 3$ and 10 , taking $l = 1$ to simplify the calculations.

If $v(x, 0) \neq 0$ on the electrode, then we obtain instead of (2.2)

$$j(x) = \frac{\sigma H_0 v(x)}{\pi(1+\omega^2\tau^2)} - \frac{\sigma H_0 (l+x)^{-1/2-\epsilon} (l-x)^{-1/2+\epsilon}}{\pi c(1+\omega^2\tau^2)} + \int_{-l}^l \frac{(l+t)^{1/2+\epsilon} (l-t)^{1/2-\epsilon}}{t-x} \frac{v(t) dt}{\pi \sqrt{1+\omega^2\tau^2}} + \frac{I(l+x)^{-1/2-\epsilon} (l-x)^{-1/2+\epsilon}}{\pi \sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \quad (-l \leq x, t \leq l) \quad (2.4)$$

We shall omit the formula for the tangential component of velocity here and in the following discussion. This formula may readily be written out by using boundary condition (1.2) or the Sokhotskiy-Plemel' formula.

The current distribution along the electrode, according to (1.6), is determined from the following expression

$$j(z) = \frac{\sigma H_0 (z+l)^{-1/2-\epsilon} (z-l)^{-1/2+\epsilon}}{\pi c \sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \int_{-l}^l \frac{(l+x)^{1/2+\epsilon} (l-x)^{1/2-\epsilon}}{x-z} \frac{v(x) dx}{\pi \sqrt{1+\omega^2\tau^2}} - \frac{I}{\pi} (z+l)^{-1/2-\epsilon} (z-l)^{-1/2+\epsilon} \quad (z \in S^-, -l \leq x \leq l) \quad (2.5)$$

(b) Solution which is bounded close to end a and unbounded close to end/b39
b. In order for current $j_y(x)$ defined by formula (2.4) to take on an unbounded value near electrode end a, including the point a, the following integral condition must obviously be fulfilled.

$$\frac{1}{c} \sigma H_0 \int_{-l}^l \left(\frac{l+t}{l-t} \right)^{-1/2+\epsilon} v(t) dt = I \sqrt{1+\omega^2\tau^2} \quad (-l \leq t \leq l) \quad (2.6)$$

This relationship determines the character of the injection (or drawing off) of the conducting medium on segment ab as a function of the magnitude and direction of the current passing through the electrode and physical properties of the flow.

Then, taking consideration of the identity

$$\int_{-l}^l \frac{(l+t)^{1/2+\epsilon} (l-t)^{1/2-\epsilon}}{t-x} \frac{v(t) dt}{\pi \sqrt{1+\omega^2\tau^2}} = \int_{-l}^l \frac{(l+t)^{1/2+\epsilon} (l-t)^{1/2-\epsilon}}{t-x} \frac{v(t) dt}{\pi \sqrt{1+\omega^2\tau^2}} + \int_{-l}^l \left(\frac{l+t}{l-t} \right)^{-1/2+\epsilon} \frac{v(t) dt}{\pi \sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \quad (-l \leq t \leq l) \quad (2.7)$$

and condition (2.6) we get from (2.4) the distribution of current on the electrode and in its vicinity

$$j_y(x) = \frac{\sigma H_0 v(x)}{c(1+\omega^2\tau^2)} - \frac{\sigma H_0 (l+x)^{1/\epsilon} (l-x)^{-1/\epsilon}}{\pi c(1+\omega^2\tau^2)} \int_{-l}^l \left(\frac{l+t}{l-t}\right)^{-1/\epsilon} \frac{v(t) dt}{t-x} \quad (-l \leq x, t \leq l) \quad (2.8)$$

$$j(z) = \frac{\sigma H_0 (z+l)^{1/\epsilon} (z-l)^{-1/\epsilon}}{\pi c \sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \int_{-l}^l (l+x)^{-1/\epsilon} (l-x)^{1/\epsilon} \frac{v(x) dx}{x-z} \quad (-l \leq x \leq l, z \in S^-) \quad (2.9)$$

As may be seen, the current is limited close to end a, vanishing at the point a.

Let us consider a specific example in illustration of the resultant formulas. Let us assume that $v(x)$ remains constant over the entire length of the electrode, and let us introduce the notation

$$\frac{1}{c} \sigma H_0 v(x) = \Delta_a = \text{const}, \quad -l < x < l \quad \text{for } y=0 \quad (2.10)$$

Then, taking consideration of the fact that

$$\int_{-l}^l (l+t)^{-1/\epsilon} (l-t)^{1/\epsilon} dt = 2l\Gamma\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \epsilon\right) = \frac{\pi l(1-2\epsilon)}{\cos \pi \epsilon} \quad (2.11)$$

we find from (2.6)

$$\Delta_a = I / \pi l (1-2\epsilon) \quad (2.12)$$

The integrals in (2.8) and (2.9) are calculated with the aid of Cauchy's theorem on residues. Making the necessary transformations and computations, we finally get

$$\Psi_a^+(z) = \frac{I}{\pi l (1-2\epsilon)} \left[1 - \left(\frac{z+l}{z-l} \right)^{1/\epsilon} \right] \quad (2.13)$$

$$\Psi_a^-(z) = \begin{cases} i\bar{z} = i_x + i y_y & \text{for } z \in S^+ \\ j(z) = i_x - i y_y & \text{for } z \in S^- \end{cases}$$

Hence

$$j_y(x) = \frac{\Psi_a^+(x) - \Psi_a^-(x)}{2i} = \frac{I(l+x)^{1/\epsilon} (l-x)^{-1/\epsilon}}{\pi l (1-2\epsilon) \sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \quad (-l \leq x \leq l) \quad (2.14)$$

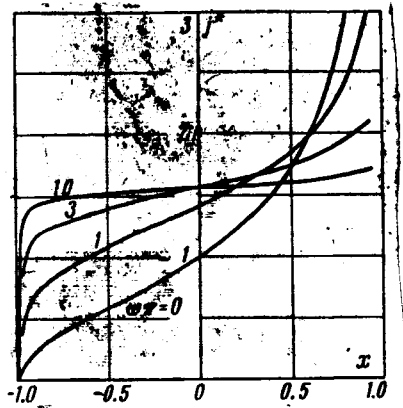


Figure 3

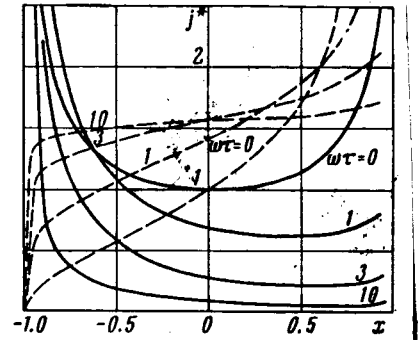


Figure 4

Curves $j^* = \pi j_y(x) |I$ are plotted from this formula in figure 3 for the 40 four values $\omega\tau = 0, 1, 3$ and 10 . A comparison of these graphs with the analogous curves in figure 2 shows that the distribution of the normal component of current on the electrode levels off with injection of an electrically conductive medium of the given type. This effect is intensified as the parameter $\omega\tau$ is increased, just as in those cases where the nonhomogeneity of current distribution is especially great due to anisotropy of flow conductivity. This is clearly evident from an examination of figure 4 showing j^* curves: solid lines indicating the case (a) without injection, and broken lines indicating the case (b).

(c) Solution which is bounded close to the end b and unbounded close to end a. All considerations and computations in this case are completely analogous to the preceding, therefore we shall give only the final formulas and limit ourselves to brief remarks.

The condition which must be fulfilled by injection velocity at the electrode is now:

$$\frac{1}{c} \sigma H_0 \int_{-l}^l \left(\frac{l+t}{l-t} \right)^{1/2+\epsilon} v(t) dt = -I \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (-l \leq t \leq l) \quad (2.15)$$

Distribution of current on the electrode and in its vicinity is described by the formulas

$$j_y(x) = \frac{\sigma H_0 v(x)}{c \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} - \frac{\sigma H_0 (l+x)^{-1/2-\epsilon} (l-x)^{1/2+\epsilon}}{\pi c (1 + \omega^2 \tau^2)} \int_{-l}^l \left(\frac{l+t}{l-t} \right)^{1/2+\epsilon} \frac{v(t) dt}{t-x} \quad (-l \leq x, t \leq l) \quad (2.16)$$

$$j(z) = -\frac{\sigma H_0 (z+l)^{-1/2-\epsilon} (z-l)^{1/2+\epsilon}}{\pi c \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \int_{-l}^l \left(\frac{l+x}{l-x} \right)^{1/2+\epsilon} \frac{v(x) dx}{x-z} \quad (-l \leq x \leq l, z \in S^-) \quad (2.17)$$

We shall assume as before by way of example that the velocity on the electrode is constant over its entire length and introduce the notation

$$\frac{1}{c} \sigma H_0 v(x) = \Delta_b = \text{const}, \quad -l \leq x \leq l \text{ for } y=0 \quad (2.18)$$

We then obtain from (2.15) - (2.17)

$$\Delta_b = \frac{-I}{\pi l (1 + 2e)}, \quad \Psi_b(z) = \frac{-I}{\pi l (1 + 2e)} \left[1 - \left(\frac{z-l}{x+l} \right)^{1/2+e} \right] \quad (2.19)$$

$$j_y(x) = \frac{I(l+x)^{-1/2-e}(l-x)^{1/2+e}}{\pi l (1 + 2e) \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \quad (-l \leq x \leq l) \quad (2.20)$$

The curves for current $j^* = \pi j_y(x) / I$ are given in figure 5. It is evident from an examination of these curves that injection of an electrically conductive medium through the electrode with a constant velocity $v(x) = \Delta_b c / \sigma H_0$ produces an effect which is opposite to that in the preceding case. Namely, nonhomogeneity in current distribution on the electrode is intensified as may /41 be seen from comparison of j^* curves in figures 2 and 5.

In the solutions given above, the various distributions of current on a permeable electrode are explained by the fact that injection or drawing off of the electrically conductive medium through the electrode along the wall of the channel induces an emf in a direction which is either opposite to or coincides with the longitudinal Hall emf. In the first case, the longitudinal Hall emf is compensated resulting in a more uniform flow of electric current through the porous electrode than through a solid electrode with an identical Hall effect. This case corresponds to the solution considered in section (b). In the second case, the longitudinal Hall emf is added to the emf induced by injection of the medium which increases nonhomogeneity in the distribution of current along the electrode. This result is obtained in section (c).

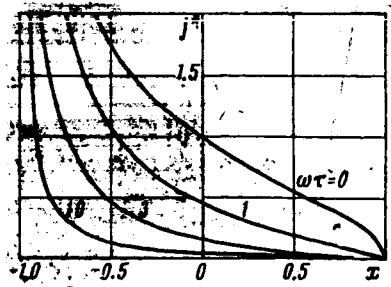


Figure 5

(d) Solution which is bounded close to both ends of the electrode. In this solution, the current density $j_y(x)$ should take on limited values close to both ends a and b of the electrode, including the end points. In this case conditions (2.6) and (2.15) should obviously be simultaneously fulfilled. By combining them, we get the single condition

$$\int_{-l}^l (l+t)^{-1/2-\epsilon} (l-t)^{-1/2-\epsilon} v(t) dt = 0 \quad (-l \leq t \leq l) \quad (2.21)$$

The solution itself has the form

$$j_y(x) = \frac{\omega \tau \sigma H_0 v(x)}{c(1 + \omega^2 \tau^2)} - \frac{\sigma H_0 (l+x)^{1/2-\epsilon} (l-x)^{1/2-\epsilon}}{\pi c(1 + \omega^2 \tau^2)} \int_{-l}^l (l+t)^{-1/2-\epsilon} (l-t)^{-1/2-\epsilon} \frac{v(t) dt}{t-x} \quad (2.22)$$

$$j_z(x) = \frac{\sigma H_0 (l+x)^{1/2-\epsilon} (l-x)^{1/2-\epsilon}}{\pi c \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \int_{-l}^l (l+t)^{-1/2-\epsilon} (l-t)^{-1/2-\epsilon} \frac{v(t) dt}{x-t} \quad (-l \leq x \leq l, z \in S^-) \quad (2.23)$$

It follows directly from (2.21) that it is impossible to obtain a current distribution which is limited close to both ends of the electrode if $v(x)$ remains constant throughout the entire length of the electrode. In all three conditions (2.6), (2.15) and (2.21) the normal velocity on the electrode appears in the integrand and therefore there is a set of relationships $v(x)$ for which each of the given solutions is realized.

Let us note in conclusion the analogy which exists between the given problems in electrodynamics of a solid medium and contact problems in the theory of elasticity. The distribution of current along the electrode has the same form as the distribution of pressures in an elastic body under a rigid punch. We are speaking of plane contact problems in the theory of elasticity with regard to forces of friction as considered in references 4 and 5.

REFERENCES

1. Hurwitz, H., Jr., Kilb, R. W. and Sutton, G. W. Influence of Tensor Conductivity on Current Distribution in a MHD Generator. J. Appl. Phys., Vol. 32, No. 2, 1961.
2. Muskhelishvili, N. I. Singulyarnyye integral'nyye uravneniya (Singular Integral Equations). Fizmatgiz, 1962.
3. Gakhov, F. D. Krayevyye zadachi (Boundary Problems). Fizmatgiz, 1963.

4. Muskhelishvili, N. I. Nekotoryye osnovnyye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti (Some Basic Problems in the Mathematical Theory of Elasticity). Izd-vo AN SSSR, 1954.
5. Galin, L. A. Kontaknyye zadachi teorii uprugosti (Contact Problems in Elasticity Theory). Gostekhizdat, 1953.

нахорох
+ stripО РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТОКА НА ПРОНИЦАЕМЫХ ЭЛЕКТРОДАХ
ПРИ НАЛИЧИИ ЭФФЕКТА ХОЛЛА В ПОТОКЕ
ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ СРЕДЫ

Ю. П. Емец

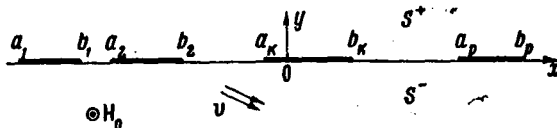
(Киев)

Рассматривается двумерная задача о распределении тока на поверхности проникаемых электродов, граничащих с потоком несжимаемой среды, в которой проявляется эффект Холла. Через электроды производится вдув (отсос) электропроводной среды с такими же физическими свойствами, которыми обладает основной поток.

Для непроницаемых электродов решение этой задачи для одного частного случая приводится в статье [1]. В этой работе было установлено, что в магнитогидродинамических каналах из-за эффекта Холла в потоке среды ток распределяется на электродах неравномерно; при значениях параметра Холла порядка нескольких единиц и более ток втекает в анизотропно-проводящую среду в основном с небольшого участка на краю электрода. Отмечалось также, что такое явление ставит в неблагоприятные условия работу электродов в магнитогидродинамических устройствах.

Ниже показано, что при помощи вдува электропроводной среды можно управлять распределением тока на электродах и, в частности, сделать его более равномерным.

4. Пусть имеем бесконечный плоский магнитогидродинамический канал с секционированными электродами, размеры которых малы по сравнению с шириной канала. Тогда, поскольку в задаче разыскивается распределение тока только на электродах, вполне достаточно исследовать поведение тока на электродах у одной стенки и пренебречь влиянием остальных. Такое допущение не вносит заметной погрешности в результаты, но существенно упрощает решение задачи.



Фиг. 1

Следуя этому упрощению, будем считать, что поток электропроводной среды $v(u(x, y), v(x, y), 0)$, обладающей анизотропией проводимости, заполняет нижнюю полуплоскость, а действительная ось совпадает с направлением стенки (фиг. 1). Отрезками $a_k b_k$ ($k = 1, 2, \dots, p$) на фиг. 1 обозначены участки соприкосновения электродов с потоком среды, остальная часть действительной оси Ox представляет собой границу изоляционных стенок. Предполагается, что внешнее магнитное поле $H(0, 0, H_z)$ однородно в нижней полуплоскости, а собственное магнитное поле рассматриваемых в среде токов мало и им можно пренебречь.

Электроды второй стенки канала отнесены к бесконечно удаленной точке.

Для нахождения токов в нижней полуплоскости имеем систему уравнений

$$j_x = \sigma \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{c} v H_0 \right) - \omega \tau j_y, \quad j_y = \sigma \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{c} u H_0 \right) + \omega \tau j_x \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad H_0 \equiv H_z$$

Здесь $j_x(x, y)$, $j_y(x, y)$ — компоненты вектора тока, $\varphi(x, y)$ — потенциал электростатического поля, σ — электропроводность, $\omega\tau$ — параметр Холла, σ и $\omega\tau$ — константы.

Полагая свойства материалов электродов и изоляционных стенок совершенными, получаем граничные условия, при которых необходимо решить систему (1.1)

$$\begin{aligned} j_x + \omega\tau j_y &= \frac{1}{c} \sigma H_0 v(x), & a_k < x < b_k & \text{ при } y=0 \\ j_y &= 0, & b_k < x < a_{k+1} & \text{ при } y=0 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} k=1, 2, \dots, p \\ a_{p+1}=a_1 \end{array} \right) \quad (1.2)$$

На бесконечности имеем стоки или источники тока.

При сделанных предположениях из системы (1.1) вытекает, что поле электрического тока будет соленоидальным и безвихревым, и, следовательно, можно ввести комплексный потенциал электрического тока $F(z)$ по формулам

$$\begin{aligned} j_x(x, y) &= \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, & j_y(x, y) &= \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \\ F(z) &= P(x, y) + iQ(x, y) & (z=x+iy) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = j_x(x, y) - ij_y(x, y), \quad \frac{dF(z)}{dz} = j(z)$$

В (1.3) $P(x, y)$ — потенциальная, а $Q(x, y)$ — силовая функции электрического тока; $j(z)$ — комплексный электрический ток.

Определение токов в полуплоскости $\text{Im } z < 0$ сводится теперь к следующей краевой задаче для комплексного тока:

$$\text{Re}\{(1+i\omega\tau)j(x)\} = \frac{\sigma H_0}{c} v(x) \text{ на } L', \quad \text{Im } j(x) = 0 \text{ на } L'' \quad (1.4)$$

Здесь через L' обозначена совокупность отрезков $a_k b_k$ ($k=1, \dots, p$), а через L'' — остальная часть действительной оси.

На бесконечности $j(z)$, а силу исходных предположений, характеризуется разложением

$$j(z) = \frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^2} + \dots, \quad |z| \rightarrow \infty$$

Краевую задачу (1.4) легко решить, приводя ее к обобщенной задаче линейного сопряжения [2,3]. Для этого функцию $j(z)$ аналитически продолжим в верхнюю полуплоскость и условимся, что $v(x)$ удовлетворяет на L' условию Гёльдера. Верхнюю и нижнюю полуплоскости обозначим соответственно через S^+ и S^- , и примем за положительное направление обхода по действительной оси то, которое оставляет область S^+ слева. Тогда из (1.4) получаем следующую обобщенную задачу линейного сопряжения (задачу Римана):

$$\begin{aligned} \Psi^+(x) &= -\frac{1+i\omega\tau}{1-i\omega\tau} \Psi^-(x) + \frac{2\sigma H_0 v(x)}{c(1-i\omega\tau)} \text{ на } L' \\ \Psi^+(x) &= \Psi^-(x) \text{ на } L'' \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Psi^+(z) & \text{при } z \in S^+, \quad \Psi^+(z) = \overline{j(\bar{z})} \\ \Psi^-(z) & \text{при } z \in S^-, \quad \Psi^-(z) = j(z) \end{cases}$$

Решение неограничено

$\times \int \prod_{k=1}^p$

Для ветви, к

Комплексная формула

$j_x(x)$

$j_y(x)$

Построй систему

где I_k

Вспомогательные функции в траектории решаются электродными условиями электрического закона разности потенциалов

Решение краевой задачи (1.5), исчезающее на бесконечности, в классе неограниченных (но интегрируемых) на концах электродов функций имеет вид

$$\Psi(z) = \prod_{k=1}^p (z - a_k)^{-1/2-\varepsilon} (z - b_k)^{-1/2+\varepsilon} \left\{ \frac{\sigma H_0}{\pi c \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \times \right. \\ \left. \times \int_L \left| \prod_{k=1}^p (x - a_k)^{1/2+\varepsilon} (x - b_k)^{1/2-\varepsilon} \right| \frac{v(x) dx}{x - z} + C_1 z^{p-1} + C_2 z^{p-2} + \dots + C_p \right\} \quad (1.6)$$

$$(\varepsilon = \pi^{-1} \arctg \omega \tau, \quad 0 \leq \varepsilon < 1/2)$$

Для функции, стоящей под знаком произведения в (1.6), выбрана ветвь, которая при больших $|z|$ характеризуется разложением

$$\prod_{k=1}^p (z - a_k)^{-1/2-\varepsilon} (z - b_k)^{-1/2+\varepsilon} = \frac{1}{z^p} + \frac{d_{p+1}}{z^{p+1}} + \dots \quad |z| \rightarrow \infty \quad (1.7)$$

Компоненты электрического тока j_x, j_y на электродах находятся по формулам Сохоцкого—Племеля

$$j_x(x) = \frac{\Psi^+(x) + \Psi^-(x)}{2} = \frac{\sigma H_0 v(x)}{c(1 + \omega^2 \tau^2)} + \left| \prod_{k=1}^p (x - a_k)^{-1/2-\varepsilon} (x - b_k)^{-1/2+\varepsilon} \right| \times \\ \times \left\{ \frac{\omega \tau \sigma H_0}{\pi c(1 + \omega^2 \tau^2)} \int_L \left| \prod_{k=1}^p (t - a_k)^{1/2+\varepsilon} (t - b_k)^{1/2-\varepsilon} \right| \frac{v(t) dt}{t - x} + \right. \\ \left. + \frac{\omega \tau (C_1 x^{p-1} + C_2 x^{p-2} + \dots + C_p)}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \right\} \quad (1.8)$$

$$j_y(x) = \frac{\Psi^+(x) - \Psi^-(x)}{2i} = \frac{\omega \tau \sigma H_0 v(x)}{c(1 + \omega^2 \tau^2)} - \left| \prod_{k=1}^p (x - a_k)^{-1/2-\varepsilon} (x - b_k)^{-1/2+\varepsilon} \right| \times \\ \times \left\{ \frac{\sigma H_0}{\pi c(1 + \omega^2 \tau^2)} \int_L \left| \prod_{k=1}^p (t - a_k)^{1/2+\varepsilon} (t - b_k)^{1/2-\varepsilon} \right| \frac{v(t) dt}{t - x} + \right. \\ \left. + \frac{C_1 x^{p-1} + C_2 x^{p-2} + \dots + C_p}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \right\} \quad (1.9)$$

Постоянные C_k ($k = 1, 2, \dots, p$) однозначно определяются из линейной системы p уравнений

$$\int_{a_k}^{b_k} j_y(x) dx = I_k \quad (k = 1, 2, \dots, p) \quad (1.10)$$

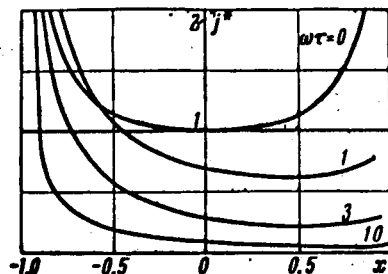
где I_k — суммарный ток, протекающий через k -й электрод.

В полученном решении j_x и j_y обращаются в бесконечность порядка меньше единицы в точках a_k и b_k . В физическом смысле эти особенности характеризуют концентрацию токов на концах электродов и в их окрестности. Можно построить также другие решения, остающиеся ограниченными вблизи любых наперед заданных концов электродов (и необходимо обращающиеся на них в нуль). Вопрос о выборе требуемого решения определяется в конкретных случаях на основании дополнительных физических условий и предположений. В частности, необходимо принимать во внимание электрическую схему соединения электродов, их взаимное расположение и размеры, закон распределения нормальной скорости на электродах и другие условия. Общее число всех возможных решений равно 2^{2p} [2,3].

2. Исследуем подробно частный случай, когда на стенке расположен один электрод конечных размеров

$$ab = 2l, \quad -l \leq x \leq l \text{ при } y = 0$$

Все решения, число которых равно 2^2 , определяются теперь только условиями вдува электропроводной среды через электрод.



Фиг. 2

Рассмотрим эти решения и выведем условия, которым должна при этом удовлетворять скорость вдува на электроде.

(а) *Решение, не ограниченное на двух концах электрода.* При отсутствии вдува ($v(x) = 0$ на ab) растекание тока, протекающего через электрод, в области S^- будет сопровождаться концентрацией его на концах электродов a и b . Распределение тока на электроде находим на основании полученного решения (1.8), (1.9).

$$j_x(x) = \frac{\omega\tau C}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} (l+x)^{-1/2-\epsilon} (l-x)^{-1/2+\epsilon} \quad (2.1)$$

$$j_y(x) = \frac{-C}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} (l+x)^{-1/2-\epsilon} (l-x)^{-1/2+\epsilon} \quad (-l \leq x \leq l) \quad (2.2)$$

Постоянная C определяется из условия (1.10)

$$I = \frac{-C}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \int_{-l}^l (l+x)^{-1/2-\epsilon} (l-x)^{-1/2+\epsilon} dx = \frac{-C\Gamma(1/2-\epsilon)\Gamma(1/2+\epsilon)}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} =$$

$$= \frac{-\pi C}{\cos \pi\epsilon \sqrt{1+\omega^2\tau^2}}, \quad C = -\frac{I}{\pi} \quad (2.3)$$

Формулы (2.1)–(2.3) показывают влияние анизотропии проводимости среды на распределение тока на электроде. При увеличении параметра $\omega\tau$ плотность тока возрастает у края электрода возле конца a и соответственно уменьшается у конца b . Этот эффект иллюстрируется на фиг. 2, где построены кривые $j^* = \pi j_y(x) / I$ для четырех значений параметра $\omega\tau = 0, 1, 3$ и 10 , причем для упрощения расчетов было принято $l = 1$.

Если $v(x, 0) \neq 0$ на электроде, то вместо (2.2) имеем

$$j_y(x) = \frac{\omega\tau\sigma H_0 v(x)}{c(1+\omega^2\tau^2)} - \frac{\sigma H_0 (l+x)^{-1/2-\epsilon} (l-x)^{-1/2+\epsilon}}{\pi c(1+\omega^2\tau^2)} \times$$

$$\times \int_{-l}^l (l+t)^{1/2+\epsilon} (l-t)^{1/2-\epsilon} \frac{v(t) dt}{t-x} + \frac{I (l+x)^{-1/2-\epsilon} (l-x)^{-1/2+\epsilon}}{\pi \sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \quad (2.4)$$

$$(-l \leq x, t \leq l)$$

Формулу для тангенциальной компоненты тока на электроде здесь и в дальнейшем опускаем, при необходимости ее легко выписать, используя граничное условие (1.2) или формулы Сохоцкого — Племеля.

Возле электрода распределение тока, согласно (1.6), определяется из следующего выражения

$$j(z) = \frac{\sigma H_0 (z+l)^{-1/2-\epsilon} (z-l)^{-1/2+\epsilon}}{\pi c \sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \int_{-l}^l (l+x)^{1/2+\epsilon} (l-x)^{1/2-\epsilon} \frac{v(x) dx}{x-z} -$$

$$- \frac{I}{\pi} (z+l)^{-1/2-\epsilon} (z-l)^{-1/2+\epsilon} \quad (z \in S^-, -l \leq x \leq l) \quad (2.5)$$

(6) Решение, ограниченное вблизи конца a и неограниченное вблизи конца b . Для того чтобы ток $j_v(x)$, определяемый формулой (2.4), принимал ограниченные значения возле конца электрода a , включая и точку a , должно, очевидно, выполняться интегральное условие

$$\frac{1}{c} \sigma H_0 \int_{-l}^l \left(\frac{l+t}{l-t} \right)^{-1/2+\varepsilon} v(t) dt = I \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (-l \leq t \leq l) \quad (2.6)$$

Это соотношение определяет характер вдува (или отсоса) проводящей среды на участке ab в зависимости от величины и направления суммарного тока, протекающего через электрод, и от физических свойств потока.

Учитывая, далее, тождество

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l (l+t)^{1/2+\varepsilon} (l-t)^{1/2-\varepsilon} \frac{v(t) dt}{t-x} &= (l+x) \int_{-l}^l \left(\frac{l+t}{l-t} \right)^{-1/2+\varepsilon} \frac{v(t) dt}{t-x} + \\ &+ \int_{-l}^l \left(\frac{l+t}{l-t} \right)^{-1/2+\varepsilon} v(t) dt \quad (-l \leq t \leq l) \end{aligned} \quad (2.7)$$

и условие (2.6), получаем из (2.4) распределение тока на электроде и его окрестности

$$j_v(x) = \frac{\omega \tau \sigma H_0 v(x)}{c(1 + \omega^2 \tau^2)} - \frac{\sigma H_0 (l+x)^{1/2-\varepsilon} (l-x)^{-1/2+\varepsilon}}{\pi c(1 + \omega^2 \tau^2)} \int_{-l}^l \left(\frac{l+t}{l-t} \right)^{-1/2+\varepsilon} \frac{v(t) dt}{t-x} \quad (2.8)$$

$(-l \leq x, t \leq l)$

$$f(z) = \frac{\sigma H_0 (z+l)^{1/2-\varepsilon} (z-l)^{-1/2+\varepsilon}}{\pi c \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \int_{-l}^l (l+x)^{-1/2+\varepsilon} (l-x)^{1/2-\varepsilon} \frac{v(x) dx}{x-z} \quad (2.9)$$

$(-l \leq x \leq l, z \in S^-)$

Как видно, вблизи конца электрода a ток ограничен, а в самой точке a принимает нулевое значение.

Для иллюстрации полученных формул рассмотрим конкретный пример. Положим, что $v(x)$ сохраняет постоянное значение по всей длине электрода и введем обозначение

$$\frac{1}{c} \sigma H_0 v(x) = \Delta_a = \text{const}, \quad -l < x < l \quad \text{при } y=0 \quad (2.10)$$

Тогда, учитывая, что

$$\int_{-l}^l (l+t)^{-1/2+\varepsilon} (l-t)^{1/2-\varepsilon} dt = 2l \Gamma\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \varepsilon\right) = \frac{\pi l (1 - 2\varepsilon)}{\cos \pi \varepsilon} \quad (2.11)$$

находим из (2.6)

$$\Delta_a = I / \pi l (1 - 2\varepsilon) \quad (2.12)$$

Интегралы в (2.8) и (2.9) вычисляются при помощи теоремы Коши о вычетах. Проводя необходимые преобразования и вычисления, получим в конечном итоге

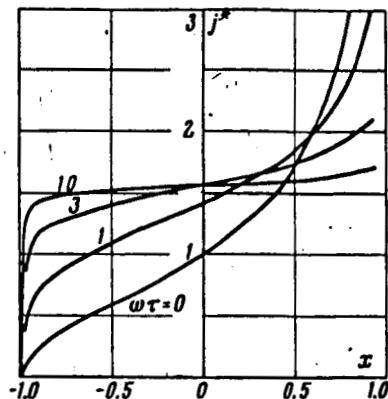
$$\Psi_a^+(z) = \frac{I}{\pi l (1 - 2\varepsilon)} \left[1 - \left(\frac{z+l}{z-l} \right)^{1/2-\varepsilon} \right] \quad (2.13)$$

$$\Psi_a^-(z) = \begin{cases} i \bar{z} = i x + i y & \text{при } z \in S^+ \\ j(z) = i x - i y & \text{при } z \in S^- \end{cases}$$

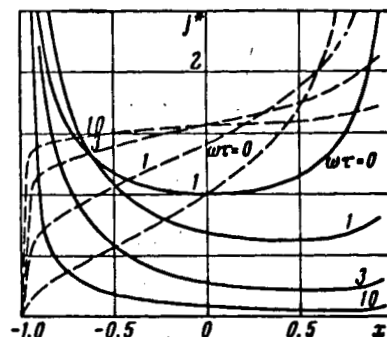
Отсюда

$$j_v(x) = \frac{\Psi_a^+(x) - \Psi_a^-(x)}{2i} = \frac{I (l+x)^{1/2-\varepsilon} (l-x)^{-1/2+\varepsilon}}{\pi l (1 - 2\varepsilon) \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \quad (-l < x < l) \quad (2.14)$$

По этой формуле на фиг. 3 построены кривые $j^* = \pi j_y(x) / I$ для четырех значений $\omega\tau = 0, 1, 3$ и 10. Сравнивая их с аналогичными кривыми на фиг. 2, можно заметить, что при наличии вдува электропроводной среды заданного вида распределение нормальной компоненты тока на электроде выравнивается. Этот эффект усиливается по мере увеличения параметра $\omega\tau$, как раз в тех случаях, когда неравномерность распределения тока, из-за анизотропии проводимости потока, особенно велика. Это



Фиг. 3



Фиг. 4

четко видно из рассмотрения фиг. 4, где изображены кривые j^* : сплошными линиями — для случая (а) при отсутствии вдува, а пунктирными — для случая (б).

(в) *Решение, ограниченное вблизи конца b и неограниченное вблизи конца a.* Все рассуждения и выкладки в этом случае вполне аналогичны предыдущим, поэтому приведем только конечные формулы и ограничимся краткими замечаниями.

Условие, которому необходимо подчинить теперь скорость вдува на электроде, таково:

$$\frac{1}{c} \sigma H_0 \int_{-l}^l \left(\frac{l+t}{l-t} \right)^{1/2+\epsilon} v(t) dt = -I \sqrt{1+\omega^2 \tau^2} \quad (-l \leq t \leq l) \quad (2.15)$$

Распределение тока на электроде и его окрестности описывается формулами

$$j_y(x) = \frac{\omega \tau \sigma H_0 v(x)}{c(1+\omega^2 \tau^2)} - \frac{\sigma H_0 (l+x)^{-1/2-\epsilon} (l-x)^{1/2+\epsilon}}{\pi c (1+\omega^2 \tau^2)} \int_{-l}^l \left(\frac{l+t}{l-t} \right)^{1/2+\epsilon} \frac{v(t) dt}{t-x} \quad (-l \leq x, t \leq l) \quad (2.16)$$

$$j(z) = \frac{-\sigma H_0 (z+l)^{-1/2-\epsilon} (z-l)^{1/2+\epsilon}}{\pi c \sqrt{1+\omega^2 \tau^2}} \int_{-l}^l \left(\frac{l+x}{l-x} \right)^{1/2+\epsilon} \frac{v(x) dx}{x-z} \quad (-l \leq x \leq l, z \in S^-) \quad (2.17)$$

Пусть, как и раньше, для примера положим скорость на электроде постоянной по всей его длине и введем обозначение

$$\frac{1}{c} \sigma H_0 v(x) = \Delta_b = \text{const}, \quad -l \leq x \leq l \text{ при } y=0 \quad (2.18)$$

Тогда из (2.15)–(2.17) получим

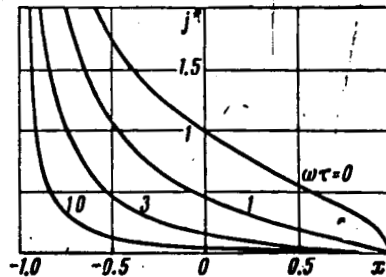
$$\Delta_b = \frac{-I}{\pi l (1+2\epsilon)}, \quad \Psi_b(z) = \frac{-I}{\pi l (1+2\epsilon)} \left[1 - \left(\frac{z-l}{z+l} \right)^{1/2+\epsilon} \right] \quad (2.19)$$

$$j_y(x) = \frac{I (l+x)^{-1/2-\epsilon} (l-x)^{1/2+\epsilon}}{\pi l (1+2\epsilon) \sqrt{1+\omega^2 \tau^2}} \quad (-l \leq x \leq l) \quad (2.20)$$

Кривые для тока $j^* = \pi j_y(x) / I$ приведены на фиг. 5. Из их рассмотрения следует, что за счет вдува электропроводной среды через электрод с постоянной скоростью $v(x) = \Delta_b c / \sigma H_0$ достигается эффект, противоположный предыдущему. Именно, не-

равномерность распределения тока на электроде усиливается, что видно из сравнения кривых j^* на фиг. 2 и 5.

В приведенных выше решениях различные распределения тока на проницаемом электроде объясняются тем, что за счет вдува или отсоса через электрод электропроводной среды вдоль стенки канала индуцируется электродвижущая сила, которая направлена либо встречно с продольной э. д. с. Холла, либо имеет согласное направление с последней. В первом случае происходит компенсация продольной э. д. с. Холла, и в результате этого протекание электрического тока через пористый электрод происходит более равномерно, чем через сплошной при одинаковом влиянии эффекта Холла. Этот случай соответствует решению, рассмотренному в пункте (б). В противном случае продольная э. д. с. Холла складывается с э. д. с., индуцируемой вдувом, и неравномерность распределения тока вдоль электрода увеличивается. Этот результат получен в пункте (в).



Фиг. 5

(г) *Решение, ограниченное вблизи двух концов электрода.* В этом решении плотность тока $j_v(x)$ должна принимать ограниченные значения вблизи двух концов электрода a и b , включая и сами концы. Условия (2.6) и (2.15) при этом должны, очевидно, выполняться совместно. Складывая их, получим одно условие

$$\int_{-l}^l (l+t)^{-1/r-2} (l-t)^{-1/r-2} v(t) dt = 0 \quad (-l \leq t \leq l) \quad (2.21)$$

Само же решение имеет вид

$$j_v(x) = \frac{\omega \tau \sigma H_0 v(x)}{c(1 + \omega^2 \tau^2)} - \frac{\sigma H_0 (l+x)^{1/r-2} (l-x)^{1/r-2}}{\pi c (1 + \omega^2 \tau^2)} \int_{-l}^l (l+t)^{-1/r-2} (l-t)^{-1/r-2} \frac{v(t) dt}{t-x} \quad (-l \leq x, t \leq l) \quad (2.22)$$

$$j(z) = \frac{-\sigma H_0 (z+l)^{1/r-2} (z-l)^{1/r-2}}{\pi c \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \int_{-l}^l (l+x)^{-1/r-2} (l-x)^{-1/r-2} \frac{v(x) dx}{x-z} \quad (-l \leq x \leq l, z \in S^-) \quad (2.23)$$

Непосредственно из (2.21) следует, что нельзя получить распределение тока, ограниченное вблизи двух концов электрода, если $v(x)$ сохраняет постоянное значение по всей длине электрода. Во всех трех условиях (2.6), (2.15) и (2.21) нормальная скорость на электроде входит под знаком интеграла, поэтому для каждого из рассмотренных решений существует множество зависимостей $v(x)$, при которых они реализуются.

В заключение отметим аналогию, которая существует между рассмотренными задачами электродинамики сплошной среды и контактными задачами теории упругости. Распределение тока возле электрода имеет такой же вид, как и распределение давления в упругом теле под жестким штампом. Имеются в виду плоские контактные задачи теории упругости при наличии сил трения, рассмотренные в монографиях [4, 5].

Поступила 2 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Hurwitz H., Jr, Kilb R. W., Sutton G. W. Influence of Tensor Conductivity on Current Distribution in a MHD Generator. J. Appl. Phys., 1961, vol. 32, No 2.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1954.
5. Галаи Л. А. Контактные задачи теории упругости. Гостехтеориздат, 1953.